Title	Fuzzy measures and integral on multisets (Mathematical Studies on Independence and Dependence Structure : Algebra meets Probability)
Author(s)	成川, 康男
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1820: 73-86
Issue Date	2012-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/194646
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1820 巻 2012 年 73-86

Fuzzy measures and integral on multisets

桐朋学園/ 東京工業大学・総合理工学研究科

成川康男 (Yasuo NARUKAWA)

Tohogakuen / Dept. Comp. Intell. & Syst. Sci., Tokyo Inst. Tech.

1 はじめに

重複した要素を含む Multiset の概念は、古典的な数学でも取り上げられいくつかの文献に見ることができる。たとえば、Dedekind [7] Weierstrass , Cantor [5] などである。Multiset は Knuth の有名な The Art of Computer Programming (1968) [10] でも取り扱われている。Knuth は Multiset につけられた他の名前も列挙している。たとえば、list,bunch, bag, heap, sample, weighted set, collection, and suite などである。Multiset の歴史と発展についてはBlizard によるサーベイ [3, 4] を参照されたい。また、知的システム学の分野では Yegar (1986) の Theory of bags [21] によって脚光を浴び, データ解析や意思決定などに応用されている [13]。

非加法的集合関数もその研究分野により様々な名前で呼ばれてきた。たとえば, 協力ゲーム (J. von Neumann, O. Morgenstern [17, 1] 容量 (Choquet [6]), Non additive subjective probability (Schmeidler [18]), ファジィ測度 (Sugeno,[19]) などである。また、離散凸解析 [15, 16] ではSubmodular (集合) 関数 [9] が重要な役割を果たし、Choquet 積分はL. Loväsz 拡張 [12] と呼ばれている。本稿は Multiset 上に非加法的集合関数を導入する初めての試みである。本論文の構成は以下のようになっている。

2章では, ファジィ測度とその積分について、基本的な定義と性質を紹介し、後半はMultisetの基本事項を紹介する。

3章ではMultisetの表現について、基本事項を確認する。自然数とMultisetの一対一の対応が付けられ、離散集合上の集合関数を考えるときは、集合関数は、自然数を定義域とする関数を考えることと同じことになる。その際、通常の部分集合族上の集合関数からMultisetの部分集合族上の集合関数に拡張することは自然なことである。

また、この章ではMultisetの共単調性を定義する。このことより、自然数を共単調性で分類することもできる。

4章では、一般化されたファジィ積分(GF-integral)を使って、ファジィ測度をMultisetの部分集合族上の集合関数に拡張する一つの方法を紹介する。

5章で全体のまとめと、今後の課題が述べられる。

2 Preliminaries

2.1 ファジィ測度とその積分

はじめにこの章では、本論文で用いられるファジィ測度とその積分に関する基本的な定義、定理を紹介する。

定義 2.1. X を全体集合とし、$\mathcal{X}$ は 2^X の部分集合とする。$(X,\mathcal{X})$ をファジィ可測空間と呼ぶことにする。また、関数 $f : X \to \mathbb{R}^+$ が $\mathcal{X}$-可測であるとは、$\{x|f(x) \geq a\} \in \mathcal{X}$ であるときをいう。

定義 2.2. [8] 2つの $\mathcal{X}$ 可測な関数 f と g が共単調 (comonotonic) であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して $f(x) < f(y) \Rightarrow g(x) \leq g(y)$ が成り立つことをいう。

定義 2.3. [19] $(X,\mathcal{X})$ をファジィ可測空間とする。次の性質を満たす実数値集合関数 $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ を $(X,\mathcal{X})$ 上のファジィ測度 μ という。

(1) $\mu(\emptyset)=0$, $\mu(X)=k$ ここで、 $k\in(0,\infty]$

(2) $A\subset B$, $A,B\in\mathcal{X}$ のとき $\mu(A)\leq\mu(B)$

(3) $A_n\uparrow A$ であるとき、 $\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$

μ を $(X,\mathcal{X})$ 上のファジィ測度 μ とするとき、$(X,\mathcal{X},\mu)$ をファジィ測度空間　という。

定義 2.3(3) の性質を下からの連続性という。以下では、Choquet 積分や菅野積分の一般化としての、Generalized Fuzzy 積分を定義する。

定義 2.4. 擬加法 *(A pseudo addition)* $\oplus$ とは $[0,k]$ 上の二項演算で次の条件を満たすものを言う。

(A1) $x\oplus 0=0\oplus x=x$

(A2) $x\leq u$ かつ $y\leq v$ のとき $x\oplus y\leq u\oplus v$

(A3) $x\oplus y=y\oplus x$

(A4) $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$

(A5) $x_n\to x, y_n\to y\Rightarrow x_n\oplus y_n\to x\oplus y.$

擬乗法 *(A pseudo multiplication)* $\boxdot$ とは $[0,k]$ 上の二項演算で次の条件を満たすものを言う。

(M1) $x\boxdot 1=1\boxdot x=1$

(M2) $x\leq u$ かつ $y\leq v$ のとき $x\boxdot y\leq u\boxdot v$

(M3) $x\boxdot y=y\boxdot x$

(M4) $(x\boxdot y)\boxdot z=x\boxdot(y\boxdot z)$

(M5) $x_n\to x, y_n\to y\Rightarrow x_n\boxdot y_n\to x\boxdot y.$

特に, $k=1$ のとき、擬加法を T-ノルムといい、擬乗法を T-コノルムという。

擬加法が *strict* であるとはそれが連続で狭義に単調増加であることをいう。また、擬加法 $\oplus$ がアルキメデス的であるとは すべての $x \in (0,1)$ に対して $x \oplus x > x$ であるときをいう。

例 1.

(1) The maximum operator $x \vee y$ はアルキメデス的でない擬加法である。

(2) 代数和 $x \dotplus y := x + y$ はアルキメデス的な擬加法である。

(3) 菅野演算 $x +_\lambda y := 1 \wedge (x + y + \lambda xy)$ $(-1 < \lambda < \infty)$ はアルキメデス的な擬加法である。

アルキメデス的な擬加法では、下記の加法表現定理が基本的である。

命題 2.5. [11] もしも擬加法 $\oplus$ がアルキメデス的であるとき、狭義単調増加な連続関数 $g : [0, k] \to [0, \infty]$ が存在し、$x \oplus y = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$ が成り立つ。ここで、$g^{(-1)}$ は

$$g^{(-1)}(u) := \begin{cases} g^{(-1)}(u) & if \quad u \leq g(k) \\ k & if \quad u > g(k). \end{cases}$$

で定義される g の擬減法である。

関数 g は $\oplus$ の *additive generator* と呼ばれる。

定義 2.6. $\oplus$ は [0,1] 上の $\vee$ or Archimedean または擬加法とし、$\boxdot$ は [0,l] 上の擬乗法とする。$\boxdot$ が $\oplus$-fitting とは

(F1) $a \boxdot x = 0 \Leftrightarrow a = 0$ or $x = 0$.

(F2) $a \boxdot (x \oplus y) = (a \boxdot x) \oplus (a \boxdot y)$.

(F3) $(a \oplus b) \boxdot x = (a \boxdot x) \oplus (b \boxdot x)$.

$(\oplus, \boxdot)$ を a pseudo fitting system という。

定義 2.7. *[2]* 任意の $r > 0$ と $A \in \mathcal{X}$ に対して *the basic simple function* $b(r, A)$ は $b(r, A)(x) = r$ *if* $x \in A$ $b(r, A)(x) = 0$ *if* $x \notin A$. で定義される。

関数 f が *a simple function* であるとは、それが

$$f := \sum_{i=1}^{n} b(a_i, A_i) \; for \; a_i > 0 \tag{1}$$

where $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \cdots \supsetneq A_n$, $A_i \in \mathcal{S}$. で表わされるときをいう。

定義 2.8. *[14]* $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、$(\oplus, \boxdot)$ を a pseudo fitting system とする。

関数 $f : X \to [0, 1]$ (ただし $f := \oplus_{i=1}^{n} b(a_i, A_i)$, with $a_i > 0$ and $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \ldots A_n$, $A_i \in \mathcal{X}$, $a_i \geq 0$ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n$,$A_i \in \mathcal{X}$, の一般化されたファジィ積分 (GF-integral) を次の式で定義する。

$$(GF) \int f \boxdot dm := \oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot m(A_i).$$

単純関数の一般化されたファジィ積分は well defined [2]. である。

例 2. (1) $\oplus = +$ で $\boxdot = \cdot$ のとき, 一般化されたファジィ積分は Choquet 積分である。

(2) $\oplus = \vee$ で $\boxdot = \wedge$ のとき一般化されたファジィ積分は菅野積分である。

可測関数 f, g は共単調とする。任意の $a, b \in [0, 1]$ に対して $\{x | f(x) \geq a\} \subset \{x | g(x) \geq b\}$ または $\{x | f(x) \geq a\} \supset \{x | g(x) \geq b\}$ であるので、

$$(f \oplus g)(x) := \sum_{i=1}^{n} b(a_i A_i)$$

とかける。ここで $a_i \geq 0$ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n$,$A_i \in \mathcal{X}$ である。このことを使って、以下の定理が得られる。

定理 2.9. $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、$(\oplus, \boxdot)$ を *a pseudo fitting system* とする。

可測関数 f, g は共単調とするとき,

$$(GF)\int (f \oplus g) \boxdot dm = (GF)\int f \boxdot dm \oplus (GF)\int g \boxdot dm$$

が成り立つ。

上の性質を一般化されたファジィ積分の共単調 $\oplus$ 加法性という。

2.2 Multisets

ここでは、Multiset の定義と基本的な性質を与える。

X を全体集合とする。X の multiset M とは count function $C_M : X \to N := \{0, 1, 2, \dots\}$ で特徴づけられる。ここで、C_M は対象 $x \in X$ の出現回数を意味する。

$\mathcal{M}(X)$ を X の multiset 全体の集合とする。

例 3. $X := \{a, b, c\}$ を全体集合とし multiset M を $M := \{a, a, a, b, b\}$ とする。すなわち $C_M(a) = 3$, $C_M(b) = 2$, $C_M(c) = 0$ である。

Example 3 の M を $M = \{3/a, 2/b\}$ または $M = \{(a, 3), (b, 2)\}$ と表わすこともある。

定義 2.10. $M, N \in \mathcal{M}(X)$ とするとき、包含関係と等号を下のように定義する。

$M \subset N \overset{\triangle}{\iff} C_M(x) \leq C_N(x)$ *for all* $x \in X$;

$M = N \overset{\triangle}{\iff} C_M(x) = C_N(x)$.

$M \in \mathcal{M}(X)$ とする。multiset M の部分集合のクラスを $\mathcal{P}(M)$ と書くことにする。すなわち、

$$\mathcal{P}(M) := \{N | N \subset M, N \in \mathcal{M}(X)\}.$$

である。ここで、

$|X| = n$ $M = \{(a_i, k_i) | i = 1, 2, \dots n\}$ とするとき、

$$|\mathcal{P}(M)| = \Pi_{i=1}^{n}(k_i + 1)$$

であることは明らかである。

例 4. $M=\{a,a,a,b,b\}$ とするとき、M の部分集合は,

$M_0=\emptyset$, $M_1=\{a\}$, $M_2=\{a,a\}$, $M_3=\{a,a,a\}$, $M_4=\{a,a,a,b\}$, $M_5=\{a,a,a,b,b\}$, $M_6=\{a,a,b\}$, $M_7=\{a,a,b,b\}$, $M_8=\{a,b\}$, $M_9=\{a,b,b\}$, $M_{10}=\{b\}$, $M_{11}=\{b,b\}$

とすることができ、すなわち $\mathcal{P}(M)=\{M_i|i=0,1,2,\ldots,11\}$ である。

定義 2.11. $A,B\in\mathcal{M}(X)$ とする。$\mathcal{M}(X)$ 上の *2* 項関係を以下のように定義する。

(1) $C_{A\cup B}(x)\triangleq C_A(x)\vee C_B(x)$

(2) $C_{A\cap B}(x)\triangleq C_A(x)\wedge C_B(x)$

(3) $C_{A+B}(x)\triangleq C_A(x)+C_B(x)$

(4) $C_{A\oplus B}(x)\triangleq C_A(x)\oplus C_B(x)$

(5) $C_{A\boxdot B}(x)\triangleq C_A(x)\boxdot C_B(x)$

ここで、$x\in X$ で C_A は A の *count function* である。

$A,B\in\mathcal{M}(X)$ とするとき、$A\cap B\subset A\cup B\subset A+B$ は定義より明らかである。

例 5. $X:=\{a,b,c\}$ $A:=\{a,a,b\}$, $B:=\{a,b,b,c\}$ とするとき、

(1) $A\cup B=\{a,a,b,b,c\}$

(2) $A\cap B=\{a,b\}$

(3) $A+B=\{a,a,a,b,b,b,c\}$

3 Multiset の表現

この章では全集合 X を有限とし $|X|=n$ とする.

ここで、P を素数の集合とする。すなわち $P:=\{2,3,5,7,\ldots,\}$.

X が有限集合であるから、X から P の部分集合への全単射 φ_X を定義できる。

ここで、 $M \in \mathcal{M}(X)$ とする. $\mathcal{M}(X)$ から自然数の部分集合 S への全単射 $\Phi_X(M) := \Pi_{i=1}^{n}\varphi_X(x_i)^{C_M(x_i)}$ を定義することができる。$\Phi_X(M)$ を multiset M の自然数表現という。

例 6. $X := \{a,b,c\}$, $\varphi_X(a) = 2, \varphi_X(b) = 3, \varphi_X(c) = 5$. とする。このとき,$A \in \mathcal{M}(X)$ に対して $\Phi_X(A) := 2^{C_A(a)}3^{C_A(b)}5^{C_A(c)}$ が成り立つ。ここで、$A := \{a,a,b,c\}$ とすると、$\Phi_X(A) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ である.

$M \in \mathcal{M}(X)$ とすると、

$$\Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{\Pi_{i=1}^{n}\varphi_X(x_i)^{C_A(x_i)} | A \in \mathcal{P}(M)\}$$

であるから、次の命題が成り立つ。

命題 3.1. $M \in \mathcal{M}(X)$ とする。このとき、 $\Phi_X(\mathcal{P}(M))$ は $\Phi_X(M)$ の約数の集合である

例 7. $X := \{a,b,c\}$, $\varphi_X(a) = 2, \varphi_X(b) = 3, \varphi_X(c) = 5$ とする.

ここで、 $M := \{a,a,a,b,b,c\}$ とする。

このとき、$\Phi_X(M) := 2^3 3^2 5^1 = 120$ であり、

$\Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,24,30,40,60,120\}$. である。

Φ_X を multiset の自然数表現とする。関数 $\rho : R^+ \to R$ を $\rho(x) := \log x$ で定義すれば、$\rho(1) = 0$ で $\Phi_X(\emptyset) = 1$ であるから、次の命題が成り立つ。

命題 3.2. Φ_X を *multiset* の自然数表現とする。単調増加関数 ρ で $\rho \circ \Phi_X$ がファジィ測度になるものが存在する。

次に、multisets の共単調性を定義しよう。

定義 3.3. M, N を X 上の *multiset* とする. このとき M と N が共単調であるとは、$x_1, x_2 \in X$ に対して $C_M(x_1) < C_M(x_2)$ ならば $C_N(x_1) \leq C_N(x_2)$ が成り立つことをいう。

M, N は通常の意味の集合とする。このとき、$C_M(x) = 0$ or 1 であり、$C_N(x) = 0$ or 1 であるから、M と N が共単調であることは $M \subset N$ または $M \supset N$ であることと同値である．しかし、一般的な multiset の場合、$M \not\subset N$ であり,$M \not\supset N$ となるような $M, N \in \mathcal{M}(X)$ が存在する。

例 8. $X := \{a, b, c\}$, $M := \{a, a, a, b, b, c\}$, $N := \{a, a, b, c\}$ とする．このとき、M と N は共単調である。自然数表現 Φ_X を使うと、

$\Phi_X(M) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360,$

$\Phi_X(N) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

であり、60 と 360 は共単調であるといえる。

ここで、 $M_1 := \{a, b, c\}, M_2 := \{c, c, c\}$ とすると、M_1 と M_2 は共単調である。しかし、$M_1 \not\subset M_2$ であり、かつ $M_1 \not\supset M_2$ である。

M を multiset ととし、$\mathcal{P}(M)$ を M の部分 multiset の集合とする。共単調性によって $\mathcal{P}(M)$ を分類することができる。

例 9. $X := \{a, b\}$, $M := \{a, a, b\}$ とする．ここで、$\Phi_X(M) = 2^2{\cdot}3 = 12$ である．$\Phi_X(\mathcal{P}(M))$ を共単調性により分類する。

$$M_1 := \{2, 4, 6, 12\}$$

$$M_2 := \{3, 6\}$$

とおくと、$\Phi_X(\mathcal{P}(M)) = M_1 \cup M_2$ であり、それぞれの M_i *(i=1,2)* の要素は互いに共単調である。

命題 3.4. $\mathcal{M}(X)$ は *multiset* のクラスとする。このとき、自然数の集合 M_i $i = 1, 2, \ldots, k$ が存在し、

$$\Phi_X(\mathcal{M}(X)) = \cup_{1 \le i \le k} M_i$$

で M_i の各要素は共単調である。

例 10. $X := \{a,b,c\}$ とする. 下記のように、共単調な6つの集合族が得られる。

$$M_1 := \{M | C_M(a) \leq C_M(b) \leq C_M(c)\}$$

$$M_2 := \{M | C_M(a) \leq C_M(c) \leq C_M(b)\}$$

$$M_3 := \{M | C_M(b) \leq C_M(a) \leq C_M(c)\}$$

$$M_4 := \{M | C_M(b) \leq C_M(c) \leq C_M(a)\}$$

$$M_5 := \{M | C_M(c) \leq C_M(a) \leq C_M(b)\}$$

$$M_6 := \{M | C_M(c) \leq C_M(b) \leq C_M(a)\}.$$

ここで、 *multiset* M を $M = \{a,a,b,c\}$ とすると, $\Phi_X(M) = 60$ となり、

$$M_1 \cap \Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{5, 15, 30\}$$

$$M_2 \cap \Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{3, 15, 30\}$$

$$M_3 \cap \Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{5, 10, 30\}$$

$$M_4 \cap \Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{2, 4, 10, 20, 30, 60\}$$

$$M_5 \cap \Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{3, 6, 30\}$$

$$M_6 \cap \Phi_X(\mathcal{P}(M)) := \{2, 4, 6, 12, 30, 60\}.$$

となる。

4 ファジィ測度のMultiset上への拡張

たとえ X が有限集合であっても, $\mathcal{M}(X)$ は無限集合である。問題はどのようにして $\mathcal{M}(X)$ 上のファジィ測度を定義するかである。

もし、X が有限であるとき, 2^X は有限集合であり、2^X 上にファジィ測度 μ が定義できたとする。M を X 上の multiset とし、a count function C_M は
$C_M := \oplus_{i=1}^{n} b(a_i, A_i)$, $a_i > 0$, $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \ldots A_n$, $A_i \subset X$ であるとする。

このとき、ファジィ測度 μ の multiset M への拡張 $\bar{\mu}$ を

$$\bar{\mu}(M) := \oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot \mu(A_i),$$

$a_i > 0$ and $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \ldots A_n$, $A_i \in \mathcal{X}$ で定義することができる．この $\bar{\mu}$ を μ の共単調 $(\oplus, \boxdot)$-拡張という．

ここで、

$$\bar{\mu}(M) = (GF)\int C_M d\mu$$

であるから、以下の命題が成り立つ。

命題 4.1. $M, N \in \mathcal{M}(X)$ とし，μ は 2^X 上のファジイ測度とする。もしも、M と N が共単調であれば $\bar{\mu}(M \oplus N) = \bar{\mu}(M) \oplus \bar{\mu}(N)$ が成り立つ。

逆に、もしも $\mathcal{M}(X)$ 上のファジイ測度 ν が与えられたとき、次の命題が成り立つ。

命題 4.2. もしも $\mathcal{M}(X)$ 上の ν が共単調 $\oplus$-加法的であるとき，2^X 上のファジィ測度 μ が存在して $M \in \mathcal{M}(X)$ に対して、

$$\nu(M) = (GF)\int C_M d\mu$$

が成り立つ．

例 11. $X := \{a, b, c\}$ とし,$M := \{a, a, a, a, b, b, c\}$ とする．

$$C_M = 1_{\{a,b,c\}} + 1_{\{a,b\}} + 2 \times 1_{\{a\}}$$

で得られる。ここで、Φ_X^{-1} を使うと，$\Phi_X^{-1}(720) = \Phi_X^{-1}(30) + \Phi_X^{-1}(6) + 2\Phi_X^{-1}(2)$ と表現することができる。

ここで、ファジィ測度 μ を

$$\mu(\{a\}) = 1, \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = 3,$$
$$\mu(\{a, b\}) = 3, \mu(\{b, c\}) = \mu(\{c, a\}) = 6, \mu(X) = 10.$$

とすると、M 上に拡張されたファジィ測度 $\bar{\mu}$ は:

$\bar{\mu}(M) = \mu(X) + \mu(\{a,b\}) + 2\mu(\{a\}) = 10 + 3 + 2 = 15$ となる。

ここで、$\psi = \bar{\mu} \circ \Phi_X^{-1}$ とおくと,

$$\psi(720) = \psi(30) + \psi(6) + 2\psi(2)$$

である。

5 Conclusion

本稿では、multisets のクラスの上へのファジィ測度の導入について考察した。通常の集合族上のファジィ測度から multisets のクラスの上への拡張を一般化されたファジィ積分により行った。また、一つの multiset から自然数への自然な一対一対応が定義できることから、multisets のクラスの上へと拡張されたファジィ測度は、自然数の部分集合から実数への関数とみなすことができる。

今後の課題としては、multisets のクラスの上へと拡張されたファジィ測度にふさわしい積分を定義し、その性質を明らかにすることがあげれる。また、自然数の性質とファジィ測度とその積分との関係を明らかにすることも重要なことであろう。それにより、それぞれ独立に研究されてきたファジィ測度と積分の理論や整数論の成果をたがいに反映させ、それぞれの分野の新たな知見を得ることもできるかもしれない。

References

[1] R.J.Aumann and L. S. Shapley, *Values of Non-atomic Games,* Princeton Univ. Press, 1974.

[2] P. Benvenuti, R. Mesiar, D. Vivona, Monotone set functions-based integrals, in E. Pap (ed.) Handbook of Measure Theory, Elsevier, Amsterdam, (2002), 1329-1379.

[3] W.D.Blizard, The development of multiset theory. Mod. Log. 1, No.4, (1991) 319-352.

[4] W.D.Blizard, Updates and corrections to "The development of multiset theory". Mod. Log. 7, No.3-4, (1997) 434.

[5] G. Cantor, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, translation, introduction, and notes by P. Jourdain, Dover, New York, 1955.

[6] G.Choquet . Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5, (1955), 131-295.

[7] R. Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, translated by W. W. Beman, Dover, New York, 1963.

[8] C. Dellacherie, Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, *Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics,* 191, Springer, 1971, 77- 81.

[9] S. Fujishige, Submodular Functions and Optimization, North-Holland, 1991.

[10] D.E.Knuth, The Art of Computer Programming , Vol. 2: Seminumerical Algorithms (3rd edition ed.). Addison Wesley.1998.

[11] C.H. Ling, Representation of associative functions, Publ. Math. Debrecen, 12 (1965), 189-212.

[12] L. Loväsz,,Submodular functions and convexity,in Mathematical programming : the state of the art, Bonn 1982 / edited by A. Bachem, M. Grotschel, B. Korte, Springer-Verlag, (1983).

[13] S. Miyamoto, Generalized bags, bag relations, and applications to data analysis and decision making. Torra, Vicenc (ed.) et al., Modeling decisions for artificial intelli-

gence. 6th international conference, MDAI 2009, Lecture Notes in Computer Science 5861. 37-54 (2009).

[14] T. Murofushi, M. Sugeno, Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: Generalization of Sugeno integral and Choquet integral, Fuzzy Sets and Systems, 42 (1991) 57-71.

[15] K. Murota , Matrices and Matroids for Systems Analysis. Algorithms and Combinatorics, Vol.20, Springer-Verlag (2000).

[16] K. Murota , Discrete Convex Analysis. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Vol.10, Society for Industrial and Applied Mathematics, (2003).

[17] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

[18] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, 57, (1989), 517-587.

[19] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, (1974).

[20] M. Sugeno, T. Murofushi, Pseudo-additive measures and integrals, J. Math. Anal. Appl., 122 (1987), 197-222.

[21] R.R.Yager, Theory of bags,Int.J.General Systems, 13, (1986), 23-37.